Mathematica による
メカニズム

このPDFファイルは，個人での使用やモラルに基づいた教育的使用に関しては制限致しません。

図面やノートブック等のファイルを必要とする場合は電子メールで対応できる範囲内で協力致します。

komine@kgn.dendai.ac.jp

@Komine Tatsuo 1997

いよいよ夏間近！という６月のある日，東京電機大学出版局の植村八潮さんにお会いしたとき「ちょっと，ちょっと。こんなのがあるんですが」と誘われたのが，本書を発刊するきっかけでした。

Mathematica という数式解析ソフトがあり，世界的に広まっているという事は知っていました。それまであまり強い興味を持たなかった私が，面白そうだなと感じて分不相応な仕事をさせて頂いた動機は*Mathematica* のグラフィクスとアニメーション機能に惹かれたためです。 1970 年代半ばのマイコン台頭期に，メカニズムの動きをマイコンのディスプレイに映し出そうとして，線を描くための計算や表示座標を調整するだけの計算に多くの時間を費やして，リンク機構や歯車列のアニメーションを作り，ディスプレイ上で動くエンジンのアニメーションを見ながらも，線を描くためのプログラムでアニメーションを作り出しても ”絵を描く事だけに終わってしまう ”という感が拭えませんでした。パソコンが高性能になって，コンパイラ言語が主流になり，高機能のアプリケーションソフトが動き始めても「動画と理屈」が１：１に近いリンク関係はなかなか期待できませんでした（というのは私の不勉強でした）。植村さんから *Mathematica* の話しを聞いた数日後に *Mathematica* を購入して早速いじってみると， 20 年ほど前からのもやもやが一気に解消された思いがしました。*Mathematica* は理屈をタイピングすると絵にしてくれるという夢のような結果をもたらしてくれました。以前に書いたBASIC ソースの1/20 程度のタイピング量で「理屈と動画」をほぼ１：１に対応させてくれるという素晴らしいソフトウェアが*Mathematica* です。夏の２週間ほどを利用してメカニズムと*Mathematica* の200 ページ程の原稿を作ってみましたが，*Mathematica* の鮮烈なカルチャーショックに押されて機械本というよりはプログラム本の気配が濃厚になってしまいました。また *Mathematica* はいつでも自由にやりとりのできるインタプリタであるにも関わらず，昨今のコンパイラ言語に染まってしまって，*Mathematica* の特徴であるインタラクティブな使い方も弱かったように思います。その後しばらくして12 月の初旬に出版局の機械畑の石沢岳彦さんと出版に際してのスタイルを打ち合わせ，内容も*Mathematica* を補助的に使った機械本に徹底して組みなおそうということで，冬のスキーシーズンにもかかわらず，自宅の仕事場に閉じこもり原稿を書き直しました。本書の基本コンセプトはメカニズムの

理屈からアニメーションを作る。**「動くメカニズムの本」** にあります。また*Mathematica* をインストールしていない方でもパソコンがあれば*Mathematica* アニメーションを体験できるようにとWolfram Reserchのご厚意で*MathReader* というツールも使用させて頂きました。

機構学という分野の入門書や解析本には多くの良書が上梓されています。機構学でメカニズムの動きを論じるときに，何枚もの図面を用いてもその動きを直観的に理解しづらいものが少なくありません。また多くの文献で運動に関して大変精細な図表が紹介されますが，それらは理論式や実験値を基にイラストレータの手によって描かれたものが大部分ではないかと思います。

Mathematica は理論式から直接グラフを作る事やアニメーションを作る事ができ，描画のために行う手続きも最小限のもので済みます。本書は*Mathematica* の使用目的をメカニズムの動きに限定したため，面倒なアルゴリズムはほとんどありません。

第１章と第２章に第３章以降の各論の共通基礎事項となるメカニズムの運動と機構学に関する総論的なものをまとめたつもりです。第３章以降の各論では平面不等速度運動を行うメカニズムと歯車列のアニメーションに重点をおきました。

浅学な私が断言するのは畏れ多いことですが，視覚的に理解することを目的とした「メカニズムのアニメーション本」はまだ数少ないと思います。一般的に機構学で扱う分野のなかで「この図面が動けばなあ」と思われるものをアニメーションにしてみました。パソコンが確実に活かせる本になったと思います。

パソコンさえあれば誰でもが体験できるアニメーション本という欲張ったコンセプトをご理解頂き，快く*MathReader* を提供していただいた株式会社Wolfram Researchの皆様，*Mathematica* という素晴しいツールを啓蒙して下さった植村八潮氏，なるべく安価にしたいという私の無理を諒解していただき，最終版組みまでお世話頂いた石沢武彦氏をはじめとする東京電機大学出版局の皆様，本当にありがとうございました。

1997 年2月

小峯　龍男

1． *Mathematica* のデータ名について

本書ではリストのファイル名をList 3.5.1のように示しています。ファイル管理の都合上，CD-ROM の収録ファイル名は次のようになっていますので，読み替えてくださるようお願いいたします。

Macintosh 版　　List 3.5.1---> 3_5_1

Windows 版　　List 3.5.1---> 3_5_1.ma

また，***Mathematica*** ではデータやコマンドやリスト等を書き込んだ***Mathematica*** のファイルを**notebook** と呼びます。

2． *MathReader* について

マシン本体に***Mathematica*** をインストールされていない方はCR-ROM に収録の***MathReader*** を使うと**notebook** を読み取る事ができます。***MathReader*** は***Mathematica*** の**notebook** を見るためのビュワーで，CD-ROM 上に実行形式で収録されています。実行に際して皆さんのハードディスク環境を損なう事はありません。***Mathematica***をインストールしてある方は必要ありません。

Windows ではCD-ROM ドライブの￥mathdemo ￥mathread.exe をクリックすると，初めてのときにはini ファイルの検索確認と書き込み確認が促されてから***MathReader*** が起動します。Macintosh 版ではCD-ROM ドライブの***MathReader*** アイコンをクリックすれば起動します。

3． notebook の互換性について

パソコン環境での***Mathematica*** を考えた場合，Windows とMacintosh のハードの違いや***Mathematica*** のバージョンの違い等が考えられます。CD-ROM にはWindows 版とMacintosh 版の**notebook** および***MathReader*** を収録してあるのでこの点は問題ないでしょう。また私の使用環境からは **notebook** の互換性に問題は認められませんでした。参考までに本書で使用した私の環境を示します。

Macintosh+ ***Mathematica*** -Ver._2.2.2

Windows+ ***Mathematica*** -Ver._2.2.3 です。

Windows とMacintosh の相互で作った**notebook** は文字化けも無しに良好に動作しました。本書の **notebook** 作成に関するマシン環境は Windows ，Macintosh ともにほとんど標準的な設定ですからどなたのマシンでも動作すると思います。

4． *Mathematica* のアニメーション操作について

Mathematica のバージョンによって操作方法に若干の違いがありますが，ここではWindows で使用した*Mathematica* -Ver._2.2.3 の画面を使ってアニメーション操作の例を示します。

1.notebook をLoad する。

notebook は実行展開した結果をそのままSave してあります。グラフィクスの多い**notebook** では読み込み中にメモリ不足を警告される場合があるかもしれません。同時に開いているアプリケーションがある場合には閉じておいた方が無難かもしれません。

2. スクロールバー等でアニメーションをさせるグラフィクスデータの任意の一つをディスプレイの中央に置きます。

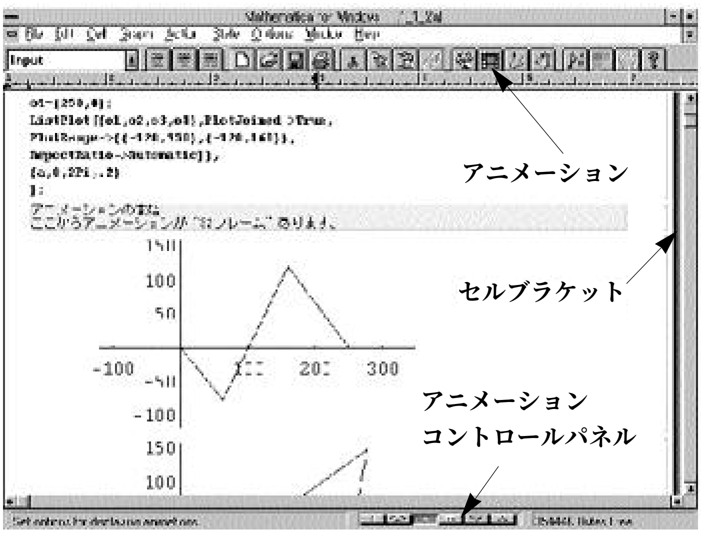
3. 一番外側のセルブラケットをクリックするか，あるいは任意のグラフィクスセルをクリックしておいてセレクトパネルの[Edit]->[SelecAll Cells] を選ぶと一番外側のセルが選択されて黒くなります。

4. アイコンパネルのアニメーションをクリックするとデフォルトの設定でアニメーションが開始されます。

5. アニメーション中の調整はアニメーションコントロールパネルで次の操作が行えます。逆転，反復，正転，一時停止，速度下降，速度上昇

6. アニメーションのデフォルト値の変更は[Optin]->[Animation] で行えます。

7. アニメーションモードの終了はディスプレイ上の任意の点をクリックします。



5． *MathReader* のアニメーション操作について

2 ． *MathReader* について の操作でmathread.ini がインストールされていれば，実行ファイルをクリックするだけで***MathReader*** が起動します。***MathReader*** のアニメーションは次の要領で行います。

1. 一番外側のセルブラケットをクリックしてアニメーション範囲を指定する。

2. コマンドメニューの[Graph]，[Animate Selected Graphics]をクリックするとアニメーションが始まります。

3. アニメーションの設定は製品版***Mathematica*** と同様に，コマンドメニューの[Optins] ，[Animation] やアニメーション操作ボタンで行えます。

4. アニメーションの終了はディスプレイ上の任意の点をクリックします。

第 1章 総論

機械の定義は技術水準や時代背景によっていくつかの説が唱えられています。今日の解釈には次のような条件が挙げられます。

(1) 抵抗力のある物体の組合わせであること。

(2) 限定された相対運動を行う部分を持つこと。

(3) 他からエネルギを受けて有効な仕事に変換すること。

(4) 他から情報を入力して変換加工し出力するもの。

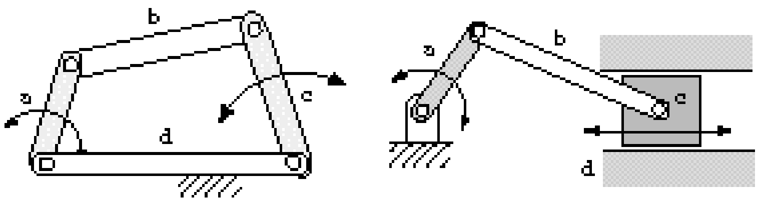
(4)の定義により今日ではコンピュータなども機械として考える事ができます。

(1) から(3) の条件を普遍的な“狭義の機械の定義”と呼び，(4) の条件は今日の技術水準から付加されたもので，これを含めたものを“広義の機械の定義”と呼びます。機構学は主に(2) に挙げた相対運動に関する「機械の動きのしくみ」を対象としたものです。

1.1 機構の考え方

機械を構成する複数の物体は互いに拘束された相対的な運動を行っています。これらの物体の組合わせを機構と呼び，機構はいくつかの定型的な構成に分類されます。機構を扱う分野を機構学と呼びます。この節では，これから機構学を学ぶにあたって必要な全般的な概念と用語に触れておきます。多くの機構学の解説書で，四節リンク機構が機構学入門の題材として採り上げられているように，本書でもこのリンク機構を用いる事にします。

四節リンク機構の詳細な説明は第3章で行います。



(a) (b)

図 1.1.1

図1.1.1 でa,b,c,d を一般には部品または部材と呼びますが，機構学ではこれを機素あるいは節と呼びます。機構には必ず限定された運動が伴います。そして運動体である各節は外力に対して十分な強さを持ち，変形を無視できるものと考えます。変形を無視したこのような部材を剛体と呼び，機構学では機構の運動にだけ着目して，図1.1.2 に示すような略記法が用いられます。サンプルプログラムのList ディレクトリにある1.1.2a と1.1.2b をロードして下さい（以下List1.1.2a の要領で記す）。次にアニメーションを実行すると図1.1.2 が運動している事と思います。ここでは機構の詳細な説明を行う

のが目的ではありません。この機構を題材に機構学の概略を紹介します。

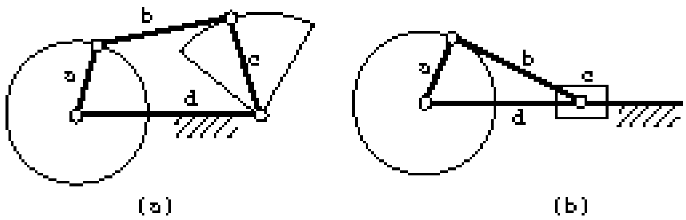


図 1.1.2

節aの運動は回転で，節の運動形態からaを回転節と呼びます。図(a) の節cのように円弧の一定範囲を往復する運動を揺動と呼び，節cを揺動節と呼びます。節dは機構全体を固定する固定節と呼ばれます。節bは節aと節cを接続する中間節と呼ばれて，この節の運動には特別な名称はありません。図(b) の節cは図(a) の揺動節を直動節に置き換えたものと考えます。機構は外部から動力を受けて，それぞれの節が拘束された運動を行い有効な仕事として出力する事を目的としています。四節リンク機構では，固定節 dを除いてa,b,c のどの節に動力を与えても運動が行われます。図(a) の機構では，節aに回転入力を与え，節cの揺動運動を利用するのが最も一般的な方法とされます。この条件で動力の授受に視点をおいた場合，動力を受け入れる節 aを原動節，出力として用いる節cを従動節と呼び，中間節bを連節棒と呼びます。図(b) はコンプレッサやエンジン等に応用されています。図(a)の機構を図1.1.3 のように分解すると，互いに隣り合う節同士の組合わせが考えられます。この組合わせの対になる部分を対偶（たいぐう）と呼び，対偶を作る互いの機素を対偶素と呼びます。

中間節は必ず存在する訳ではありません。中間節を必要としない機構もあります。

有効な仕事とは位置の移動や物体の変形等外部に対してエネルギを与える事のできることを言います。

対偶には必ず相対運動が伴います。組み合わされて固定された対は対偶とは呼びません。

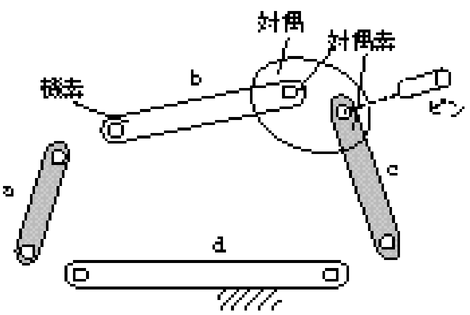


図 1.1.3

1.2 機構と対偶

対偶は機構を構成する素になります。いろいろな運動を行う機構を最小の相対運動を行う対偶まで分解すると，その種類は極めて限定されたものとなります。いま対偶を相対運動する面の組合わせに注目して，図1.2.1に示す3種類運動について考えてみます。

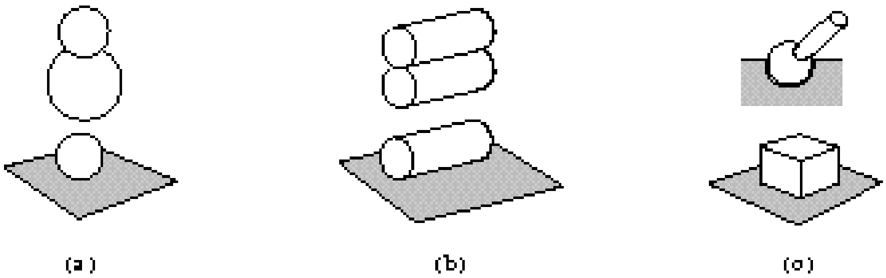


図 1.2.1

点対偶(a)は完全平面と球，あるいは球と球などの接点の接触の状態です。線対偶(b)は平面端と平面，円筒や円すい側面と平面，円筒や円すい体同士などの線で接触する状態をいいます。面対偶(c)は平面同士，凹凸球面同士等に生ずる対偶です。これらの対偶の接触面の相対的な運動を図1.2.2のように考えてみます。

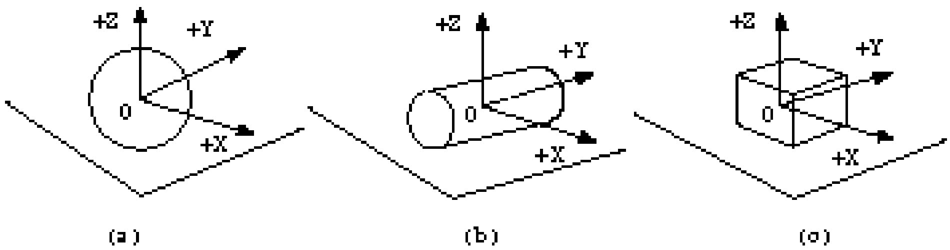


図 1.2.2

右手直交座標系は下図のように右手の親指をX軸，人差し指をY軸，中指をZ軸と考えます。

図(a)で球体は平面上を自由に移動する事ができます。球体の中心を0として，0を原点とする3次元の直交軸x,y,zを考えます。直交3軸の決め方はNC工作機械やロボット制御系で用いる右手直交座標系に従うものとします。この座標軸上で球体の運動を考えるとX軸方向の移動，Y軸方向の移動，X軸を中心とした回転，Y軸を中心とした回転，Z軸を中心とした回転の5種類が挙げられます。平面上を移動するという条件があるのでZ軸上の運動は拘束されます。これをまとめると，球体は平面上で５種類の運動状態を取る事が

空中に浮かぶ風船の運動を直交座標系で考えると自由度6になります。これが最大自由度です。

解ります。これを「自由度5」といいます。図 (b) の線対偶では，円筒は平面上でX軸方向の移動，Y軸方向の移動，Y軸を中心とした回転，Z軸を中心とした回転が考えられ，自由度は4になります。図 (c) の面対偶はX軸方向の移動，Y軸方向の移動，Z軸を中心とした回転の自由度3となります。これらはどの場合においても移動方向はX,Y 軸に沿った方向を考えました。

図1.2.3(a) のように任意の方向や任意の軌跡を描く運動は図(b) のようにX,Y 軸方向に成分を分解して考えます。

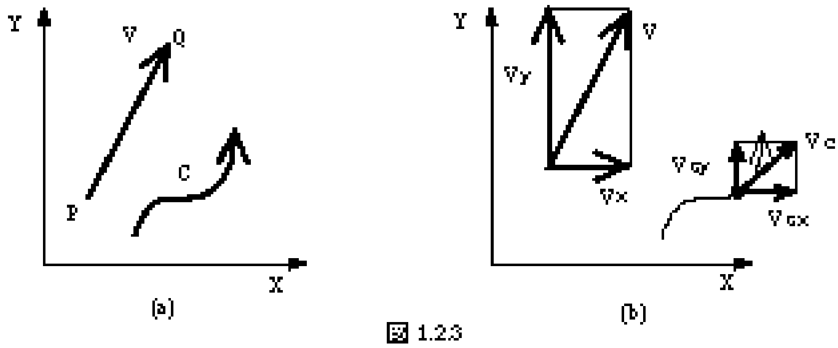


図 1.2.3

機構学では(a) のように無秩序な運動は，基本的な拘束された運動に変換して考えるからです。図1.2.2 はそれぞれの対偶の一般的な形を示したもので，ここで求めた自由度は各対偶における最大値になります。面対偶の自由度は低いのでこれを低次対偶と呼び，線対偶，点対偶は高次対偶と呼ばれます。低次対偶で自由度1になるものは動きが限定，拘束されることから限定対偶あるいは拘束対偶と呼ばれます。自由度1の運動は対偶に与えた運動と対偶から出て行く運動の関係が1:1 に対応するので，機械の運動を考える場合に大変重要な対偶となります。図1.2.4 に面対偶の特別な場合を示します。これらの対偶が機械を構成する機構の中でも重要な対偶となります。

機構の運動は1つ以上の入力に対して1つの出力をとる自由度1の限定対偶です。

(a) では節aを固定すると節bは直線運動しか行えないのでこれを進み対偶といいます。(b) は固定節aに対して，節bが回転するので回り対偶と呼びま

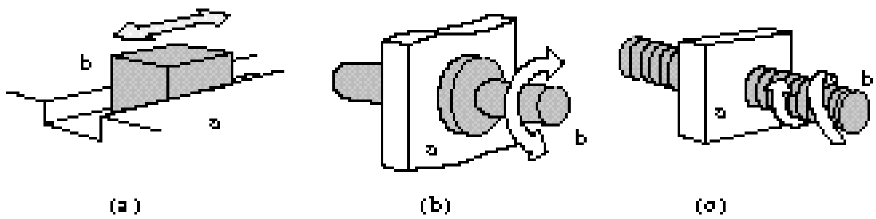


図 1.2.4

剛体上の任意の全ての点が1つの点を中心として円運動する動きが回転。

剛体中の任意の点の全てが平行に相対速度 0，相対加速度0で直進する運動が並進運動。

す。(a), (b) ともに機械の至る所に認める事ができます。(c) は回転しながら直進するという2種類の運動が複合されていますが，回転運動と直進運動は独立したものではなく，直進運動の量は回転に比例しているからこの場合も自由度は1になります。運動は，らせん運動として分類できますが，この対偶はねじ対偶と呼ばれます。これらはすべて自由度1の限定対偶です。

1.3 機構の運動

以上に機械を構成する機構の素となる対偶について述べました。この節ではこれらが組み合わされてできる機械の運動を考えてみます。

図1.3.1(a) は回転式モータの出力軸や回転軸等の運動で，機械の運動の中で最も多い回転です。回転とは物体がある一点を中心として円運動する事を言います。(b) は直線運動ですが，機構学ではこれを並進運動と呼びます。

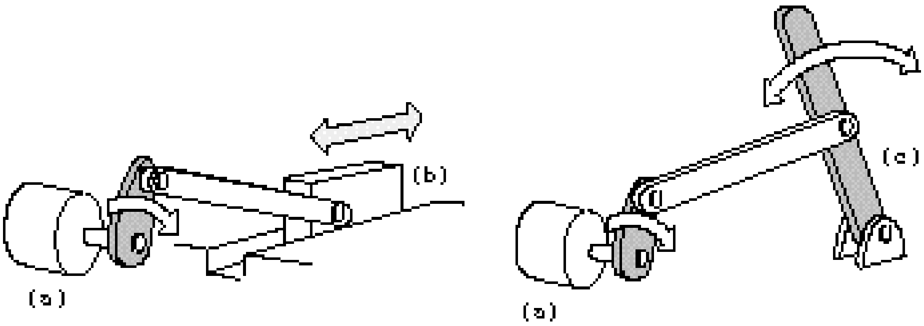


図 1.3.1

並進運動とは物体中のすべての点が平行に移動する運動を言います。(c) は図1.1.2 で述べたように一点を中心として限定された円弧上を往復する動作で，これを揺動と呼びました。

これらは移動する節の運動形態に着目した分類方法です。節の接触面相互の運動について考えると図1.3.2 に示す分類ができます。

(a) すべりとは，接触点に速度差の生じる運動です。対偶の一方の節を固

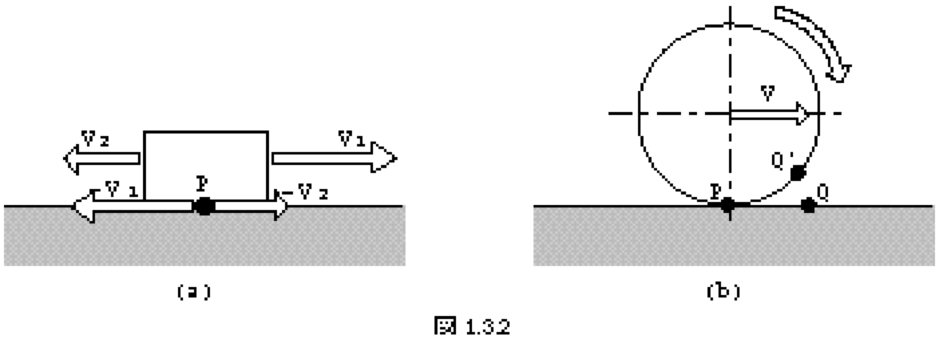


図 1.3.2

すべりところがりは平面や曲面等接触面の形状には関係しません。

定，あるいは両方の節とも運動を行う場合でも，節相互に相対速度差が生まれる場合をすべりと言います。(b) は対偶の両方の節の間の相対速度が零の場合で，これをころがりと呼びます。

1.4 回転中心と瞬間中心

1.1 で述べたように機構学では変形を無視した剛体の運動を取り扱います。この節では剛体の平面上における運動を考察します。平面上に置かれた任意の物体が状態1から状態2へ移動する様子を図1.4.1 に示します。

剛体の移動は剛体中の任意の2点に着目して考えることができます。

物体上の任意の点P,Q の位置をそれぞれP_1,P_2，Q_1,Q_2として，機構のみを利用して始点1から終点2へ移動を行わせる事を考えます。この運動に1.3 に述べた機構の運動の種類を当てはめてみると，図1.4.2 のように考えられます。

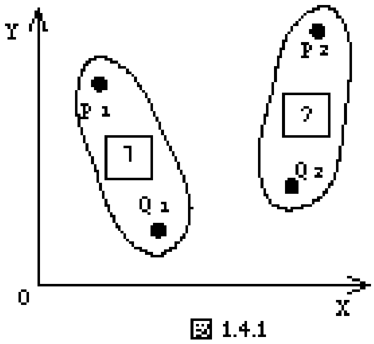


図 1.4.1

(a) は回転運動と並進運動の合成で移動を行う場合，(b) は回転運動だけで移動を行う場合になります。図(b) の点0は回転だけで物体を移動させる場合の中心になるので，この点を回転中心と呼びます。

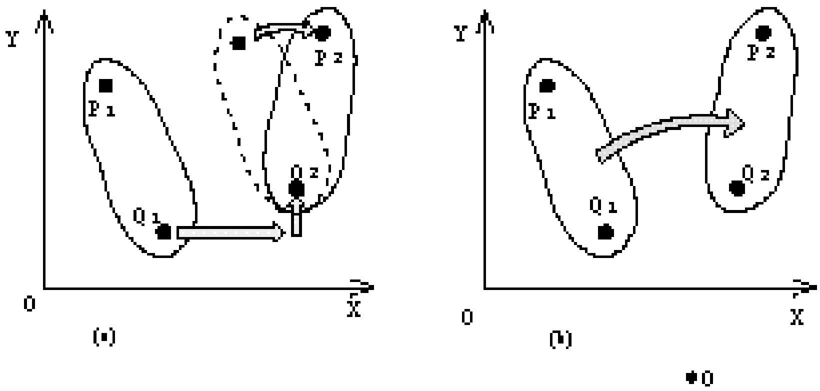


図 1.4.2

並進運動では物体中のすべての点の速度，加速度が等しく，回転運動では物体中の任意の点の速度，加速度は回転中心からの距離に比例します。図1.4.2(b) に示した回転中心は図1.4.3 に示すように点P,Q それぞれの始点と終点を結ぶ直線の垂直二等分線の交点として求められます。

図1.4.3 において，ΔP_1P_2O，ΔQ_1Q_2Oはともに二等辺三角形になります。

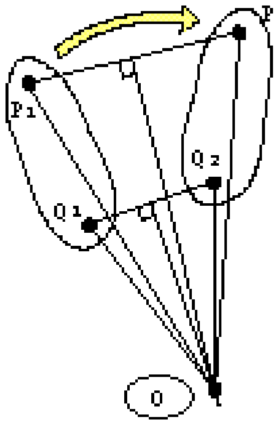


図 1.4.3

これより$P_1O=P_2O$, $Q_1O=Q_2O$が解ります。点P,Q を移動したのだから

$P_1Q_1=P_2Q_2$

$\therefore \Delta P_1Q_1O \equiv \Delta P_2Q_2O$

$\therefore \angle P_1OQ_1=\angle P_2OQ_2$

となります。ここで

$\angle P_1OQ_2$は

ΔP_1OP_2とΔQ_1OQ_2に共通だから

$\angle P_1OP_2=\angle Q_1OQ_2$

これより

「ΔP_1P_2OとΔQ_1Q_2Oは相似である」

と言えます。移動距離P_1P_2, Q_1Q_2の移動は同じ時間で行われているのですから，任意の点PとQにおける速度は回転中心Oからの距離に比例することになります。図1.4.3 で状態1と状態2の間隔を無限に狭めて回転途中の一瞬を考えれば，図1.4.4(a) となります。

このとき点P,Q にはPO，QOに垂直な方向で移動方向に回転の速さを持ったベクトルV_p，V_qが生じています。このベクトルはP_1P_2，Q_1Q_2の移動経過の微分として考えられるからV_p,V_qは点Oからの距離に比例すると考えられます。点Oは，回転移動中における瞬間の回転中心で，これを瞬間中心と呼びます。この事から瞬間中心が限定されると，剛体の任意の点の速度を求める事が可能となります。また図(b) の点Oab,Obc,Ocd,Oad は接し合うそれぞれの節同士で永久に回転の中心となるので，これを永久中心と呼びます。また節dが

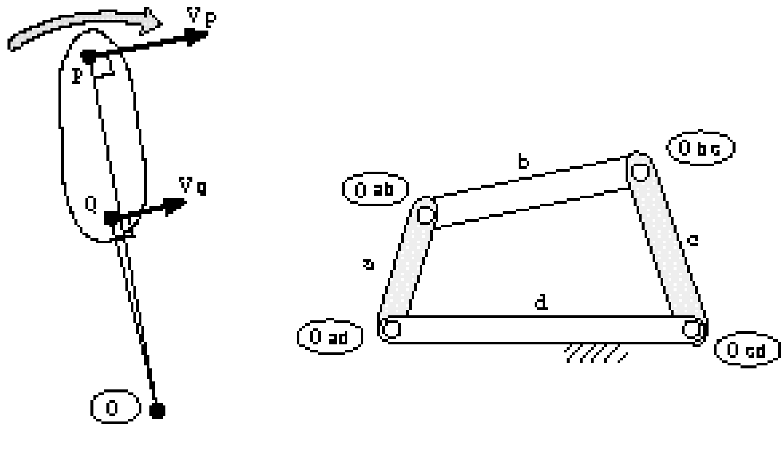


図 1.4.4

固定されているので，点O_{ad},O_{cd}は絶対的な位置を変えませんから，永久中心であると同時に固定中心とも呼ばれます。

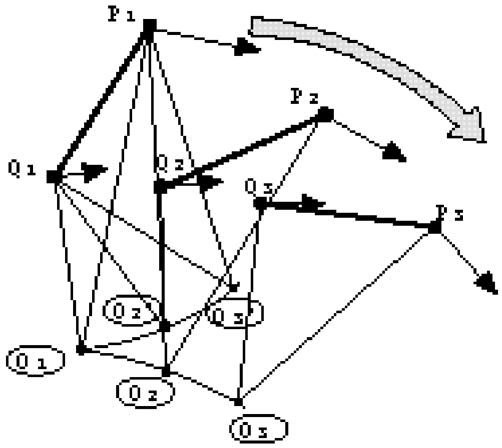


図 1.4.5

図1.4.5 でO_1,O_2,O_3のように移動する物体のその時々の瞬間中心の軌跡を，固定した平面座標上に示したものを固定セントロードと言います。一方O_1,O_2',O_3'のように△$P_2Q_2O_2$,△$P_3Q_3O_3$,... を△$P_1Q_1O_1$に重ねて瞬間中心O_2’,O_3’,... をプロットしたものを移動セントロードと呼びます。移動セントロードは固定セントロード上を転がる運動に等しくなります。図1.4.6 でこれらのセントロードを求めてそれぞれを機素とした対偶を作ると剛体PQの動きを満足するころがり機構が作れます。また瞬間中心は二つの相対運動を行う機素に対して1つ存在するので，n個の節からなる機構では瞬間中心の数は

$$ {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} $$

となります。

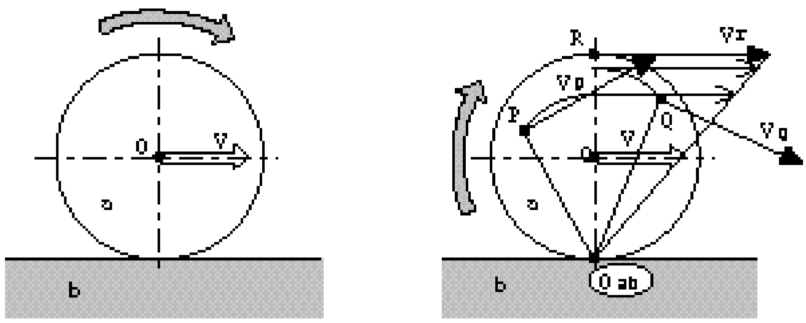


図 1.4.6

図1.4.6(a) に示す回転円板で点0の速度ベクトルが既知であれば，図(b)に示すように瞬間中心を用いて他の任意の点の速度ベクトルを求める事ができます。

1.5　３瞬間中心の定理

3個の節から構成される機構では瞬間中心の数は，

$$ {}_3C_2 = 3 $$

になります。「互いに関連する3つの瞬間中心は常に一直線上に存在する」という定理があります。今，図1.5.1 に示す3つの節a,b,c からなる機構があるとします。瞬間中心を 0_{ab} ,0_{bc} ,0_{ac} として，節ａと節ｂは節ｃに対して，

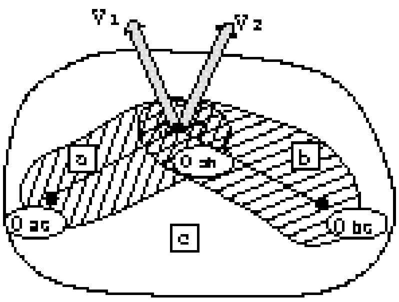


図 1.5.1

0_{ac} ,0_{bc} を回転中心あるいは永久中心として回転するものとします。 aとbの瞬間中心0_{ab}は節aの一点であると同時に節bの一点でもあります。瞬間中心0ac に対する点0_{ab}の速度ベクトルを線分$0_{ac}0_{ab}$に垂直に作用するV_1とします。また瞬間中心0_{bc}に対する点0_{ab}の速度ベクトルを線分$0_{bc}0_{ab}$に垂直に作用するV_2とします。点0_{ab}は節aと節ｂの瞬間中心であるから，点 0_{ab}におけるベクトルV1とV2は等しくなければなりません。線分 0ac0ab に垂直に作用するベクトルV1と線分$0_{bc}0_{ab}$に垂直に作用するベクトルV_2が等しくなるためには

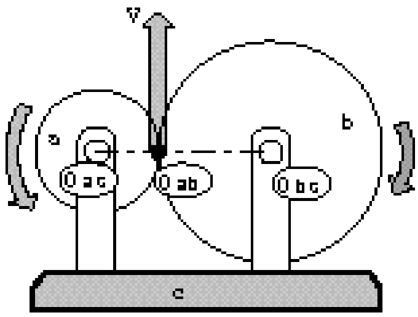


図 1.52

線分$0_{ac}0_{ab}$と線分$0_{bc}0_{ab}$が平行でなければなりません。２つの線分が平行でかつ点0_{ab}を共有するためには2つの直線が同一直線上にあり，点0_{ab}は点0_{ac}と点0_{bc}の間になければなりません。このようにして導かれた定理を3瞬間の定理あるいはケネディの定理と呼びます。図1.5.2 に摩擦車の組合わせにおける3瞬間中心の定理の例を示します。

1.6 瞬間中心の使い方

瞬間中心を用いて機構の運動を明らかにしてみましょう。図1.6.1 に示す四節クランク機構の回転節の運動状態が既知で点 Pのベクトルが図に示されている時，点Qの速度ベクトルを求めてみましょう。

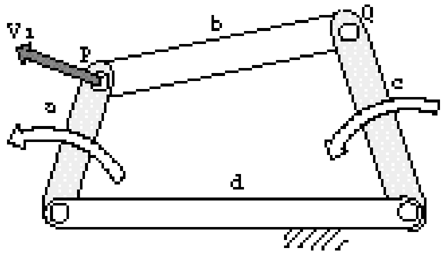


図 1.6.1

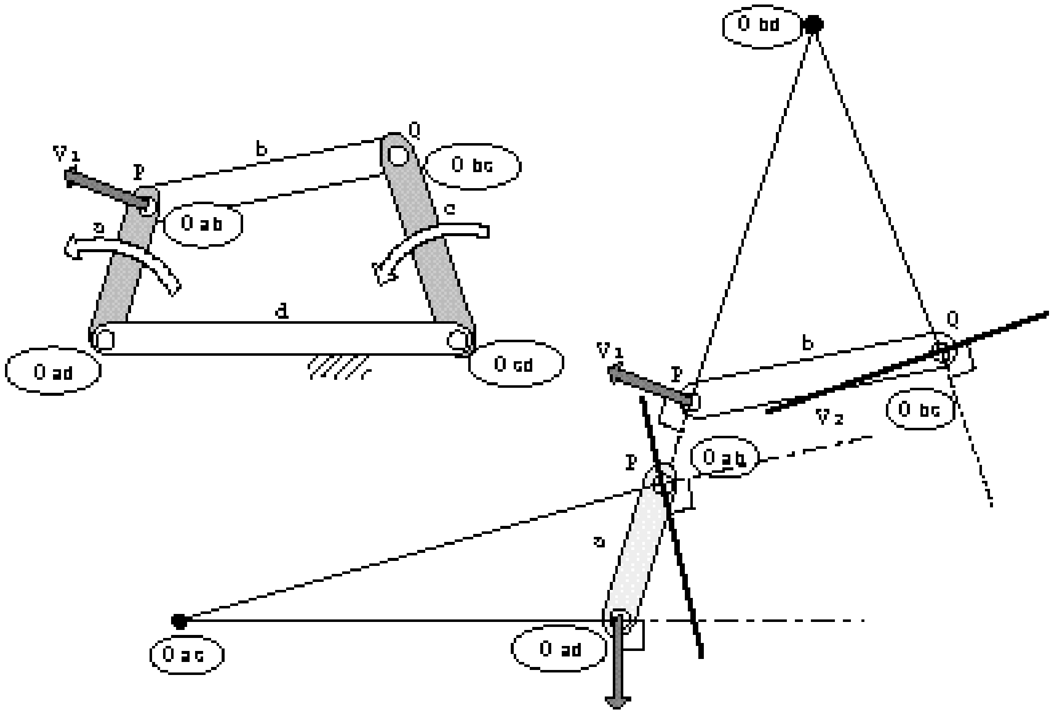


図 1.6.2

4節の機構だから瞬間中心の数は，${}_4C_2=6$になります。***Mathematica*** では

Binomial[4,2]

Binomial[n,r]
${}_nC_r$の組合わせを求めるコマンドです。

6

となります。それでは瞬間中心を求めてみましょう。節a,b,c,d それぞれの交点O_{ab},O_{bc},O_{cd},O_{da}が瞬間中心になります。瞬間中心は直接接続していない節の相互にも存在するので，残る2点はbとdの瞬間中心O_{bd},aとcの瞬間中心O_{ac}になります。図1.6.2 を使って次の手順で2つの瞬間中心を求めてみましょう。

既知の２つのベクトルの始点から伸ばした交点に他の１つの瞬間中心が求められます。

はじめに，dを固定してaを矢印の向きに回転させれば節aはO_{ad}を中心に回転するので，瞬間中心O_{ab}の速度ベクトルは節aに垂直なV_1として求められます。これによって，連接節bが節cに回転を伝えて節cは点O_{cd}を中心として回転し，点O_{bc}には節cに垂直なベクトルが生じます。このベクトルをV_2とすれば，V_1,V_2ともに節bに属しているから，瞬間中心の定義から，V_1とV_2に垂直な線分の交点に瞬間中心が存在するはずである。この点は，節 dを固定したときの節bの運動に関する瞬間中心だから節 bと節dの瞬間中心O_{bd}になります。同様にして，節ｃを固定したと仮定して節 dを点O_{cd}を中心に回転させると点O_{ad}と点O_{ab}に節aに関する速度ベクトルが考えられます。この2つのベクトルの垂直線を取って交点を求めると節cを固定した場合の節aの運動が考えられるので瞬間中心O_{ac}が求められます。この結果，節 aおよび節cを延長した交点に瞬間中心O_{bd}，節bと節dを延長した交点に瞬間中心O_{ac}が求められます。この6点で互いに3つの瞬間中心が一直線上に存在する事になります。

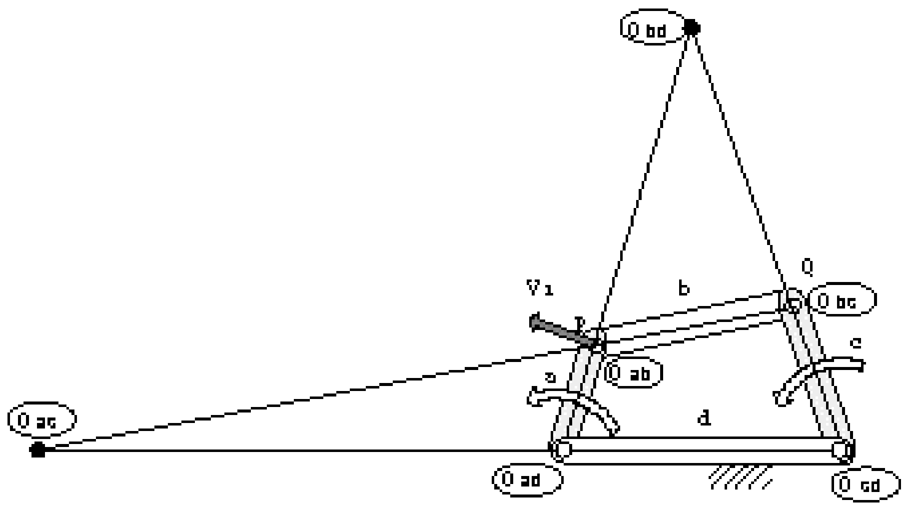


図 1.6.3

点QはdをCを固定節として，節aを回転させているので瞬間中心 O_{bd} からP点およびQ点までの距離の比から求める事ができます。

三瞬間中心の定理から次の様にも求める事ができます。

図1.6.3 で，節a,b,c についての瞬間中心を考えれば，節aとbの組み合わせ点に瞬間中心 O_{ab}，節b,c の組み合わせ点に瞬間中心 O_{bc} が求められます。残る瞬間中心 O_{ac} は三瞬間中心の定理から直線 $O_{ab}O_{bc}$ の延長線上にある事が解ります。･･･(1) 次に節a,d,c について瞬間中心をとれば，節aと節dの組み合わせ点が瞬間中心 O_{ad}，節dと節cの組み合わせ点が瞬間中心 O_{cd} になります。残る瞬間中心 O_{ac} は三瞬間中心の定理から，直線 $O_{cd}O_{ad}$ の延長線上にある事が解ります。･･･(2) 前述の(1)と(2)から直線 $O_{ab}O_{bc}$ と直線 $O_{ad}O_{CD}$ の延長線の交点が瞬間中心 O_{ac} となります。同様にして節a,b,d から瞬間中心 O_{ad} と O_{ab} が求められその延長線上に瞬間中心 O_{bd} のある事が解ります。節b,c,d から瞬間中心 O_{bc}，O_{cd} が求められ，その延長線上に瞬間中心 O_{bd} のある事が解りますから，この2本の直線の交点が瞬間中心Obd になります。

既知の２つの瞬間中心の延長線の交点に他の１つの瞬間中心が求められます。

このような方法で6個の瞬間中心が決定されます。点Pと点Qについて，節

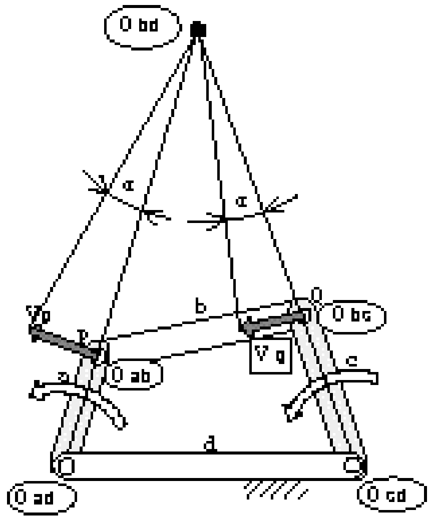


図 1.6.4

dを固定させた時の瞬間中心はそれぞれの点のベクトルの垂直線の交点であるObd である事が解ります。従って瞬間中心 OBD と既知のベクトルVp と求めるベクトルVq の間で「任意の点の速度ベクトルは瞬間中心からの距離に比例する」という瞬間中心の定理を用いて，図1.6.4 から

$V_p:V_q=O_{bd}O_{ab}:O_{bd}Obc$ により速度ベクトル V_p を求める事ができます。

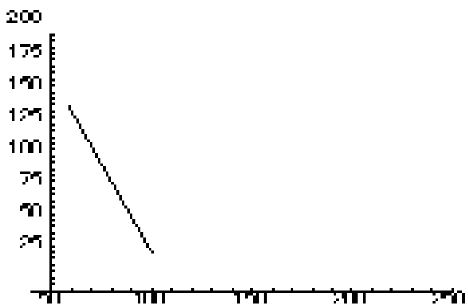
1.7 平面運動のアニメーション

ここで*Mathematica* を用いて平面運動のシミュレーションを考えてみます。図1.4.2(a)(b) を簡略化したシミュレーションを行って機械の合理的な運動を実現してみましょう。初めに併進運動と回転運動による移動を考えます。List 1.7.1(a)をロードすると次のようになります。

【平面上の運動】 List 1.7.1(a)

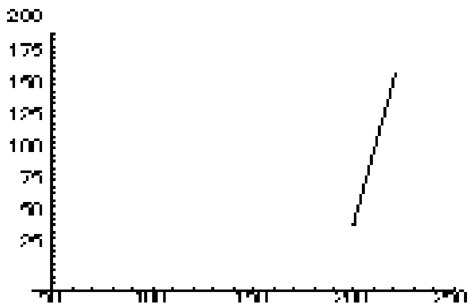
状態１から状態２までの並進運動と回転運動による移動

●ここからアニメーション開始



Degree
*Mathematica*では角度をradで扱います。度で扱いたいときに**Degree**を指定します。

この間省略



アニメーションはここまでです。

●ここからは，上のアニメーションを作るまでの経過です。

はじめに物体と運動状態を表す諸量を定義しておきます。

pq=120;{q1x,q1y}={100,30};{q2x,q2y}={200,60};sita1=110Degree;sita2=80Degree;dx=100;dy=30;

●これらを基に，点Pの位置をQの関数として決定します。

px[qx_]=N[qx+pq Cos[sita1]]

-41.0424 + qx

py[qy_]=N[qy+pq Sin[sita1]]

112.763 + qy

N[x]
xの近似値を戻します。

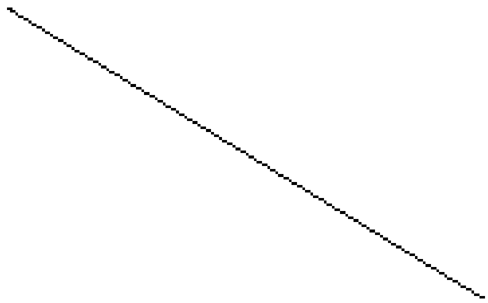
Cos[a],Sin[a]
a[rad]の三角関数を戻します。

●物体上の任意の2点を結ぶ直線P1Q1 を表示してみます。

```
p={px[q1x],py[q1y]};q={q1x,q1y};
pqline1=Line[{p,q}];
Show[Graphics[pqline1]];
```

`Line[p,q]`
`Line[{xp,yp},{xq,yq}]`
2点を結ぶ直線を定義します。描画はしません。

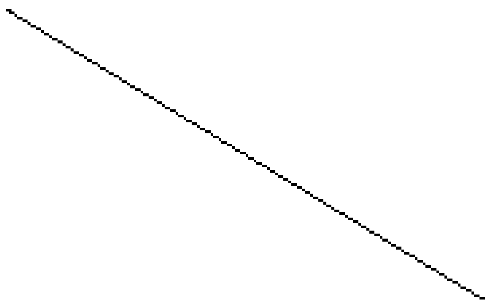
`Show[Graphics[zukei]]`
zukeiで定義した内容を描画します。



●直線P2'Q2 を表してみます。

```
p={px[q2x],py[q2y]};q={q2x,q2y};
pqline2=Line[{p,q}];
Show[Graphics[pqline2]];
```

`;`
コマンドラインの文末に付けると計算結果や描画のあとのGraphicsを非表示にします。

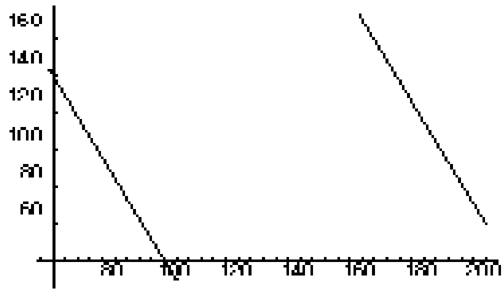


●*Mathematica* は図形の位置を画面に最適化してしまうので，P1Q1 と同じに見えます。

それでは2本の直線を一枚の画面にまとめて座標軸も表してみましょう。

```
Show[
     Graphics[pqline1],
     Graphics[pqline2],
     Axes->True
];
```

`Axes->True`
グラフ座標軸を表示させます。

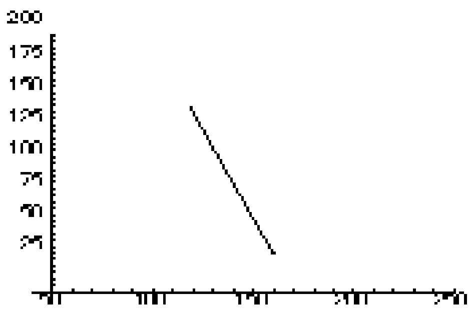


●P1Q1 からP2'Q2 への水平移動をアニメーションしてみましょう。

Do[{ work f(a)}
,{a,a0,an,step}]
aの関数workを初期値a 0から最終値a nまで，刻みstepで繰り返すコマンドです。

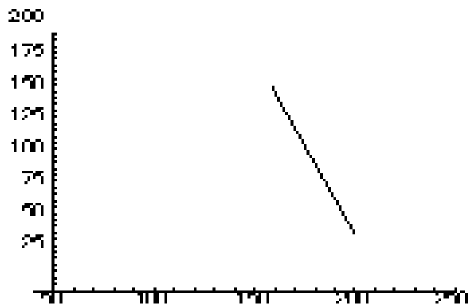
PlotRange->
{{xmin,xmax},
{Ymin,Ymax}}
描画範囲をX軸の最小，最大値とY軸の最小，最大値で指定します。

```
Do[{
      p={px[qx],py[q1y]};q={qx,q1y};
      pqline:=Line[{p,q}];
            Show[Graphics[pqline],
                  Axes->True,
                  PlotRange->{{40,250},{0,200}}]},
      {qx,q1x,q2x,20}
]
```



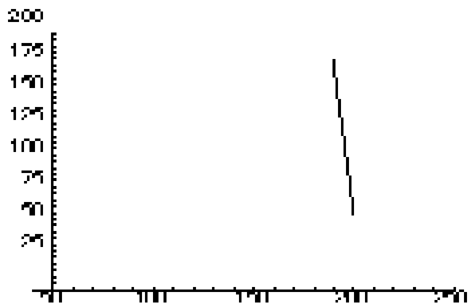
●P2'Q2 からP2Q2 までの垂直移動をアニメーションします。

```
Do[{
      p={px[q2x],py[qy]};q={q2x,qy};
      pqline:=Line[{p,q}];
            Show[Graphics[pqline],
                  Axes->True,
                  PlotRange->{{40,250},{0,200}}
                  ]},
      {qy,q1y,q2y,5}
]
```



●Q2を中心としてP2'をP2まで回転させます。

```
Do[{
      px=N[q2x+pq Cos[alfa Degree]];
      py=N[q2y+pq Sin[alfa Degree]];
      p={px,py};q={q2x,q2y};
      pqline:=Line[{p,q}];
              Show[Graphics[pqline],
                      Axes->True,
                      PlotRange->{{40,250},{0,200}}]
      },
{alfa,110,80,-5}
]
```



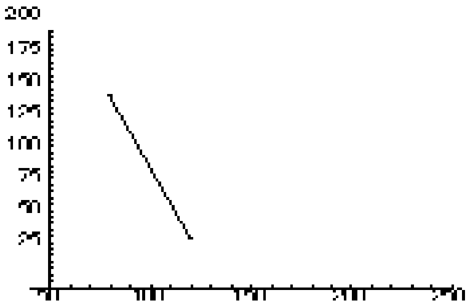
●これらをまとめると初めに示した連続アニメーションが完成です。

次に回転中心を求めて回転だけで移動するアニメーションを考えてみます。List 1.7.1(b)をLoad して下さい。

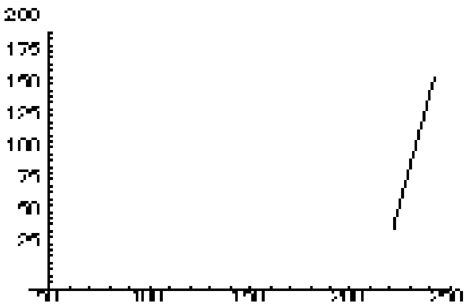
【平面上の運動】 List1.7.1b

状態１から状態２へ回転だけで移動する。

●ここからアニメーション開始



この間省略



ここでアニメーション終了

●以下はアニメーションを作る途中経過です

諸条件を設定します。

```
pq=120;{q1x,q1y}={100,30};{q2x,q2y}={200,50};
sita1=110Degree;sita2=80Degree;
```

NSolve[f(x),x]
方程式f(x)のxについての数値解を求めます。

Solve[f(x),x]
方程式f(x)からxの解を求めます。

Sqrt[x]
xの平方根を求めるコマンドです。

●P1,P2 を求めます。

```
p1x=q1x+pq Cos[sita1];p1y=q1y+pq Sin[sita1];
p2x=q2x+pq Cos[sita2];p2y=q2y+pq Sin[sita2];
```

●P1P2 の垂直二等分線

回転中心Oが垂直二等分線上にあるのだから，P1O ＝P2O から

```
NSolve[{Sqrt[(x-p1x)^2+(y-p1y)^2]
==Sqrt[(x-p2x)^2+(y-p2y)^2]},y]
{{y -> 1046.59 - 6.36977 x}}
```

●Q1Q2 の垂直二等分線

P1P2 の垂直二等分線と同様にQ10=Q20 から

```
NSolve[{Sqrt[(x-q1x)^2+(y-q1y)^2]
==Sqrt[(x-q2x)^2+(y-q2y)^2]},y]
{{y -> 790. - 5. x}}
```

この結果から回転中心は直線Y=1046.59-6.36977x と Y=790-5x の交点である事が解ります。

●垂直二等分線の交点を求める

```
NSolve[{y==1046.59-6.36977 x,y==790.-5. x},{x,y}]
{{x -> 187.323, y -> -146.617}}
```

以上により回転中心O(187.323,-146.617) が求められました。

```
{ox,oy}={187.323,-146.617}
{187.323, -146.617}
```

●回転中心から点Qまでの距離oqを求めます。

```
oq=N[Sqrt[(ox-q1x)^2+(q1y-oy)^2]]
197.025
```

●回転中心から点Pまでの距離opを求めます。

```
op=N[Sqrt[(ox-p1x)^2+(p1y-oy)^2]]
316.573
```

●pq=120 との誤差を求めてみます。

```
op-oq
119.548
```

●ここまでの途中における近似値代入計算で誤差が出ました。誤差は・・・

```
error=(120.-119.548)/120.
0.00376667
```

・・・となり，今回のアニメーションについては実用上無視できるものとします。

●これらのdata から回転のみで移動を行う経路のアニメーションは次のようになります。

```
Do[{
      px=op Cos[sita Degree];
      py=op Sin[sita Degree]; p={px,py}+{ox,oy};
      qx=oq Cos[sita Degree];
```

```
        qy=oq Sin[sita Degree];q={qx,qy}+{ox,oy};
        pqline=Line[{p,q}];
                Show[Graphics[pqline],
                        Axes->True,
                        PlotRange->{{40,250},{0,200}}];
        },
{sita,110,80,-5}
]
```

1.8　*Mathematica*で求める回転中心

Mathematica で回転中心を求めてみましょう。図1.8.1 における回転中心を回転中心の定義そのままに代数計算で求めたものを List1.8.1 に示します。回転中心は1.4 で述べたように移動点を結ぶ直線の垂直二等分線の交点として求められます。***Mathematic*** aのコマンドを用いると容易に解決することができます。

1.8.1　垂直二等分線の交点から求める

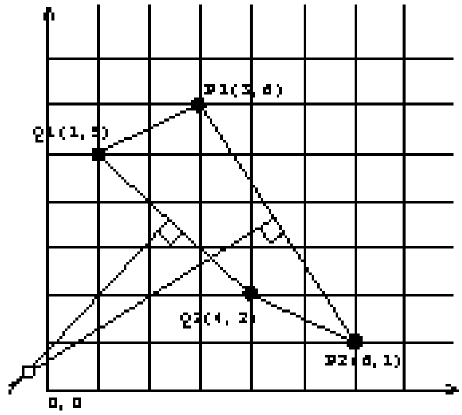


図 1.8.1

【1.8.1 】図1.8.1 の回転中心を求める　　　　List 1.8.1

はじめにＰ１，Ｐ２の垂直二等分線を求めます。

```
Solve[{Sqrt[(3-x)^2+(6-y)^2]
        ==Sqrt[(6-x)^2+(1-y)^2]},y
        ]
{{y -> 4 + 3 x
       -------}}
          5
```

次にQ１，Q２の垂直二等分線を求めます。

```
Solve[{Sqrt[(1-x)^2+(5-y)^2]
      ==Sqrt[(4-x)^2+(2-y)^2]},y
      ]
```

```
{{y -> 1 + x}}
```

回転中心は２つの垂直二等分線の交点として求められるので

```
Solve[{y==1+x,y==(4+3 x)/5},{x,y}]
```

```
            1         1
{{x -> -(-), y -> -}}
            2         2
```

これより，瞬間中心（x, y）=（-1/2，1/2）が求められました。

1.8.2 座標変換を使う

List1.8.1 は回転中心の定義にしたがって代数計算から求めました。平面における剛体の運動は座標変換を用いて求めることもできます。図1.8.2 に示す線分PQの中点の移動を座標変換を用いて考えてみましょう。前問と同じ運動条件で中点の移動ですから図形の性質から(5,1.5) が解となることはすぐに解るでしょう。List 1.8.2が***Mathematica*** の実行結果となります。

【1.8.2 】図1.8.2，点Rの移動を座標変換で求める List 1.8.2

はじめに一次変換の要素を求めます。

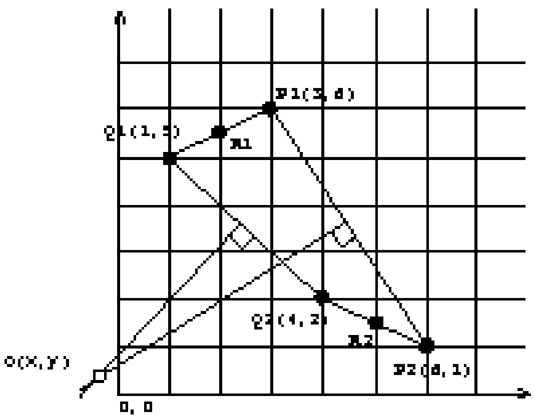


図 1.8.2

```
Solve[{
          {4,2}=={1,5}.{{a,b},{c,d}},
          {6,1}=={3,6}.{{a,b},{c,d}}
          },{a,b,c,d}
      ]
```

{}
*Mathematica*では{}で括ったデータは行列データとみなされます。これをリストと呼びます。

```
{{a -> 2/3, b -> -(7/9), c -> 2/3, d -> 5/9}}
```

次にこれらを要素ごとにくくって

Table[{x,y}]
x,yの内容をリストとして評価します。

```
Table[{{a,b},{c,d}}/.
    Solve[{
        {4,2}=={1,5}.{{a,b},{c,d}},
        {6,1}=={3,6}.{{a,b},{c,d}}
        },{a,b,c,d}
    ]
]
```

```
{{{2/3, -(7/9)}, {2/3, 5/9}}}
```

さらに行列配置で表示してみると

```
Table[{{a,b},{c,d}}/.
    Solve[{
        {4,2}=={1,5}.{{a,b},{c,d}},
        {6,1}=={3,6}.{{a,b},{c,d}}
        },{a,b,c,d}
    ]
]//TableForm
```

TableForm
リストデータの内容を行列の表形式で表示します。

2/3	2/3
-(7/9)	5/9

これで一次変換の体裁となりました。この一次変換をmtxとおいてR(2,5.5) の移動後の座標を求めてみましょう。

```
mtx:=Table[{{a,b},{c,d}}/.
    Solve[{
        {4,2}=={1,5}.{{a,b},{c,d}},
        {6,1}=={3,6}.{{a,b},{c,d}}
        },{a,b,c,d}
    ]
];
mtx
{2,5.5}. Transpose[mtx]
```

Transpose[mtx]
は文字列を行列に変換するコマンドです。

```
{{{2/3, -(7/9)}, {2/3, 5/9}}}
```

{{5., 1.5}}

{2,5.5}.{{2/3,-7/9},{2/3,5/9}}

{5., 1.5}

以上でR' の座標{0.5,1.5} が求められました。

1.9 各種の機構

これまでいくつかの具体的な機構の例を紹介しました。本書では運動の軌跡が主として平面内に描かれる平面運動機構を考察します。この節にはそれらの概略を挙げます。

1.9.1 リンク機構

リンク機構は平面運動機構の代表的なもので，リンクあるいは節と呼ばれる機素がピン等の回り対偶またはスライダ等の進み対偶によって結ばれたものです。リンクはいくつ連結しても構いません。しかし機械の条件にあるように「限定された相対運動」を作り出すには「自由度が１である事」を必要とするので機構として用いる事のできるものは限定されてしまいます。

ピン
ピン結合は活節と呼ばれます。

リンク
剛体を1点で活節接合すればリンクになりますが，機構として用いる事のできるものは限定されます。

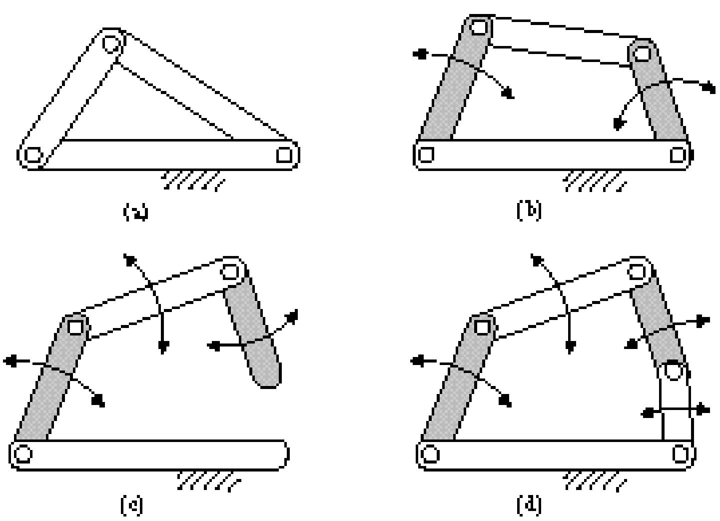


図 1.9.1

図1.9.1 で(a) の各節に相対運動は生じないのでこれは機構にはなりません。この様に３点の回り対偶で接続されたものは外力に対して高い抵抗力を持つので構造体として機械の基礎や筐体に用いられます。(b) のように４本のリンクを連結したものは，任意の一つの節を固定して他の一つの節に運動を与えると残る節が限定された動きを行います。更に一定の条件下で各節の長さを設定すると，完全に回転する最短節が生まれてきます。機械に与えら

構造体は土台や支えに使われます。家庭の中では椅子の脚や棚の支え等，戸外では鉄橋や橋げた等に3節構造が用いられています。

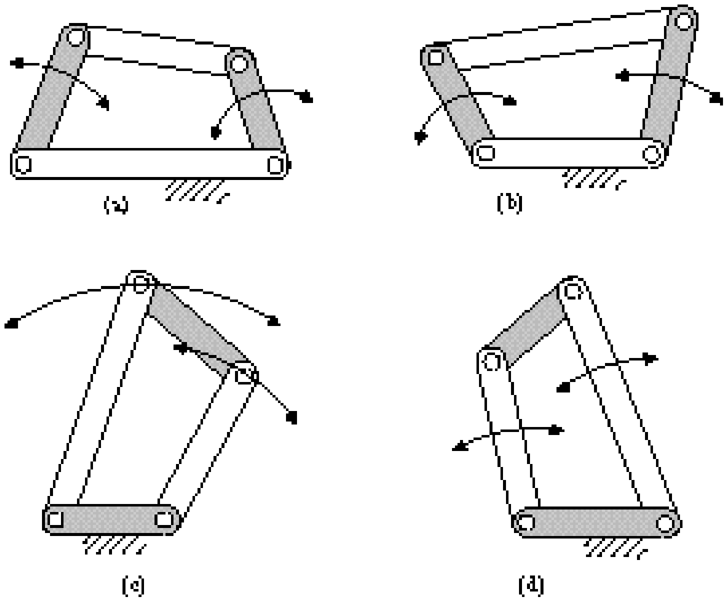


図 1.9.2

れる原動力の運動形態は回転が最も多いので，この４つの節からなる４節リンク機構はリンク装置の基本となります。(c) のようにリンクが４本あっても閉じていない場合には機構の条件を満たしません。(d) に示す５本のリンクで閉じられた連結を作ると，任意の一つの節を固定して他の一つの節を原動節としたとき，残る各節の動きは限定する事ができず機構への応用はできません。これらの事から機構として用いる事のできる自由度１のリンク機構は４節からなる閉じたリンク機構であるといえます。

完全に回転可能な節を持った４節リンク機構は固定節を交換する事により異なった運動を実現する機構に置き換えることができます。図 1.9.2 の(a) および(b) は最短リンクに接する節を固定したもので，最短リンクが回転節（クランク），最短リンクに対向するリンクが揺動節（てこ）となる「てこクランク機構」と呼ばれます。図(c) のように最短リンクを固定すると最短リンクに接する２つのリンクが回転節となる「両クランク機構」になります。図(d) のように最短リンクに対向するリンクを固定節とすると最短リンクを連接棒として他の２つの節が揺動運動を行う「両てこ機構」になります。

1.9.2 カム機構

原動節上の曲面輪郭部分に従動節がすべり接触をして，原動節の運動に伴って従動節が一定の運動を行う機構をカム機構と呼び，原動節そのものを「カム」といいます。図1.9.3 の(a) および(b) のように回転円盤の側面形状の変化を使って従動節に変位を与えるカムを板カムと呼びます。図(c) は回

転円盤の正面に設けられた溝の経路変化から従動節の変位を得るもので「正面カム」と呼ばれ，図 (d) および (e) のようにカム経路の輪郭が立体的になるものを立体カムと呼びます。カム形状に着眼すると前述の分類が考えられますが，図 (a) および (b) の従動節は従動節の変位量が増加する場合はカムによって押し上げられるので確実に動作しますが，従動節の変位量が減少する時には重力や自重あるいは，ばねなどの力によってカム側面との接触を保

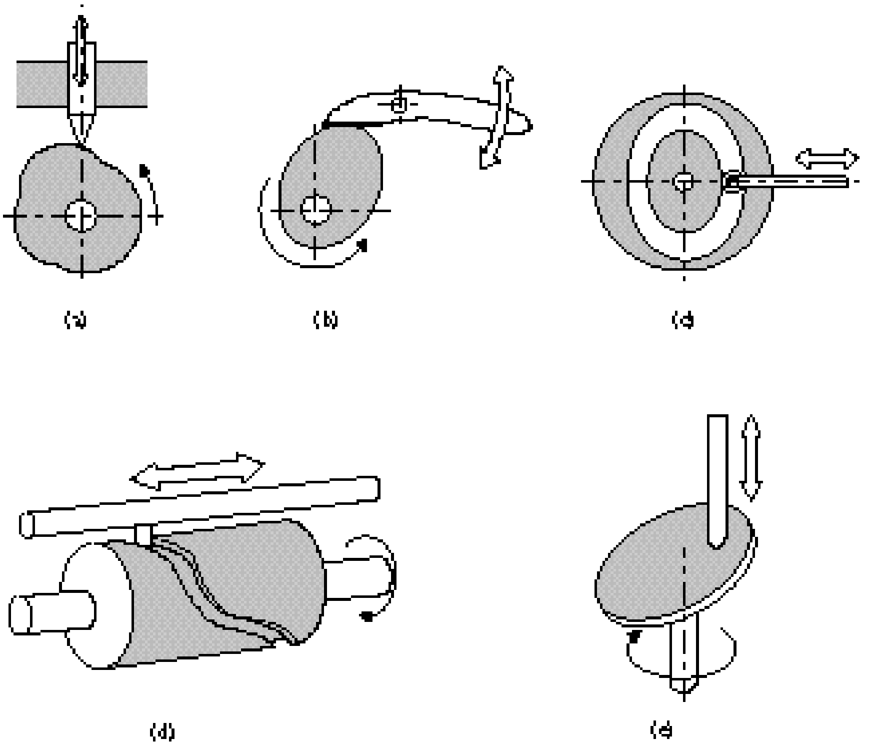


図 1.9.3

つ工夫が必要です。図 (c) の原動節と従動節の運動は従動節が常に主動節から強制的に変位を与えられているので，従動節の自由度は１となり確実な動作を行います。このように全ての動作範囲に渡って従動節の動きを拘束したカムを「確動カム」と呼びます。

高速回転する自動車用エンジンの給排気弁駆動用のカムシャフト機構に確動カムを用いて強制的に駆動するものがあります。

1.9.3 摩擦伝動装置

２つの節を接触させてその接触点の摩擦力により原動節と従動節が絶対速度の等しいころがり接触を行い動力を伝達する装置をころがり摩擦伝動装置と呼びます。摩擦伝動装置を構成する節が離れることなく，また相対速度を生じることなく接触を保つためには，接触点は両節の回転中心を結ぶ線上になくてはなりません。このような条件を継続的に満たす事のできる実用的な輪郭形状は回転円盤の側面形状となります。図1.9.4(a) および (b) は２つの円板の接触を示します。どちらの例も小円板と大円板それぞれの中心を回転

ころがり接触だけでなくすべり接触も伝動装置として用いられます。

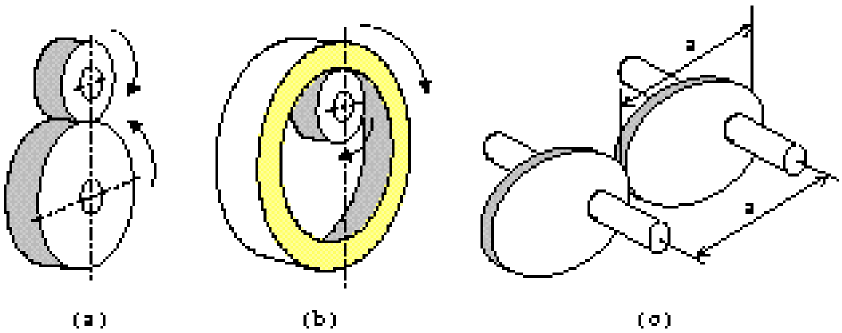


図 1.94

中心として接触しているので接触点Pは O1とO2を結ぶ線上の定点になり，角速度の比は常に一定となります。図(a)では原動節と従動節の回転の向きは同一となり，図(b)では２つの円板の回転の向きは逆になります。図(c)は同一の輪郭形状を持った２つの「だ円車」の焦点を回転中心として，その中心間距離を長軸と等しい距離として接触を保ちながら回転させたもので，接触点Qは線分O_1O_2上を移動します。回転中心から接触点までの距離が一定でないので，この機構の角速度比は常に変化します。

1.9.4　歯車伝動装置

摩擦伝動装置で伝達できる動力の大きさは接触面の摩擦力によって決められ，一般的に大きな動力の伝達には不向きです。接触面に凹凸の歯を付けて

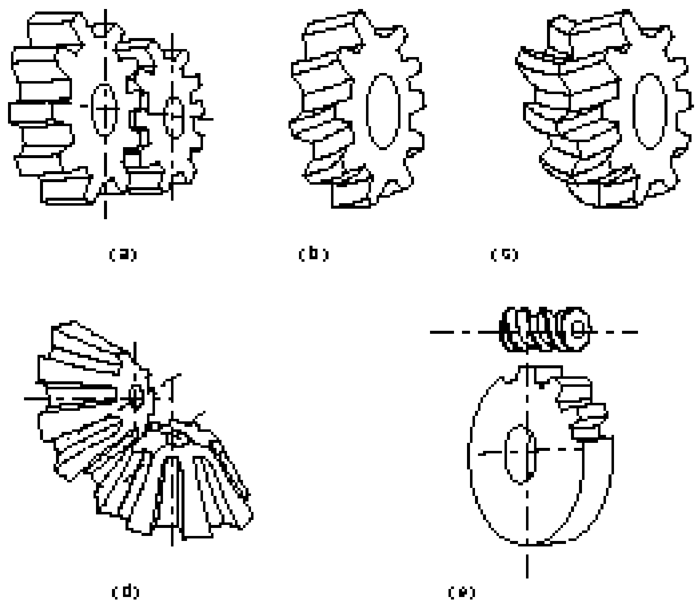


図 1.95

その引っ掛かりにより大きな動力を伝達しようとするのが歯車伝動装置です。単に回転を伝達するだけでなく，一定の角速度比で伝達することを目的とする場合は，歯の輪郭はある条件にしたがって決定されます。図1.9.5(a) のように回転円板の側面に歯を付けたものを平歯車と呼びます。図(b) は平歯車の歯をはすに付けたはすば歯車。(c) は，はすば歯車に生じる軸方向への推力（スラスト力）を消すために２つのはすばを付けたもので「やまば歯車」と呼ばれます。(d) は伝動軸が交差するかさ歯車。図(e) は一組の組合わせで大きな角速度の比が得られるウォームギヤの例です。歯車は実際には凹凸部分の接触を用いていますが，歯車の回転速さや回転の向きは接触円板に置き換えて考える事ができます。歯の強さや形状を知ることは大変重要ですが，本書では複数の歯車を噛み合わせて回転を順次伝達して行く歯車列の構成を接触円板に置き換えて考察します。

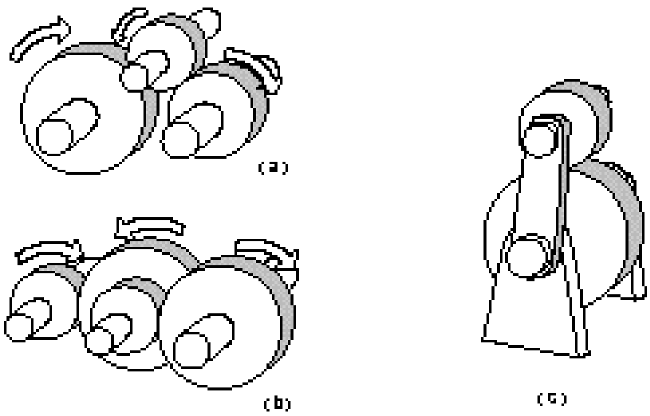


図 1.96

図1.9.6(a) は遊び歯車と呼ばれる中間歯車を用いた歯車列で，遊び歯車が奇数個の場合は原動節と従動節の回転は同一の向き，遊び歯車が偶数個の場合は原動節と従動節は逆向きの回転になります。どちらの場合も角速度の比は原動節と従動節の歯数のみで決定され，遊び歯車の歯数は影響しません。図(b) は一組の組合わせでは大きな角速度の比を作る事ができないので，数段の組合わせを使って大きな角速度比を得る方法です。図 (c) は互いに噛み合う歯車の自転と公転の合成を利用したもので減速装置や各種機構に応用される遊星歯車列と呼ばれます。

1.9.5 巻き掛け伝動装置

機構は主に剛体から構成されますが図1.9.7 に示すように原動節と従動節を仲介する中間節は必ずしも剛体である必要はありません。これらのように剛体である原動節と従動節にチェーンやベルト等を巻きつけて回転を伝達す